半無限平板を過ぎる非定常流について (流体方程式の近似解法とその特異性)

徳田, 尚之

数理解析研究所講究録
163巻 1972年 134-145

半無限平板を過ぎる非定常流について

ケンブリッジ大応数　徳田 尚之*

§1. 序

半無限平板を粘性流体中にインパルス的に板に沿ってある一定速度Uで動かした場合に生じる非定常粘性流の問題を論じる。この問題はStewartsonが1951年に最初に論文を発表して以来多くの人により研究されている。その代表的なものとしては Lam & Crocco (1958), 赤松と神元 (1966), Hall (1969), Dennis (1971) さらに谷 (1971) 等のものがある。Lam & Crocco, Hall, Dennis の論文はStewartsonの考えに基づいた境界層式を用いての数値解析解であり、Stewartsonが最初に予想した傾向を示している。

今迄この問題を扱った論文は総べてNavier-Stokesの式を近似した境界層の式に基づいている。本論文ではもっと根本から問題を見直した。ここで我々はNavier-Stokesの式はこの問題の

* 現住所　東京都文京区関口3-6-22,301.

時間と空間を含めた全領域に亘って成り立つという事を前提として出発する。それからその第一近似として境界層の式を導き、その近似の前提となった漸近展開法をまず示し、それに一貫性のある境界層の解を求めた。この漸近解は次の様な条件を満たさなければならない。

1. ある大きな（又は小さな）パラメータを使って系統的な漸近解を求めなければならない。

2. この漸近解が厳格な意味で成り立っている為には，任意の高次項まで解が求められねばならない。

3. 各次の解はその近似に合致したオーダのものでなければならない。

少なくとも，我々が求める漸近解が正しいものである事を示すには，上の三つの条件が満たされていなければならない。こうする事により，次章に述べる様な Stewartson が含んでいる色々な意味での物理的矛盾を解明する事が出来る。

§2. Stewartson の境界層式への解.

前縁からの距離 x が充分大きい所の流れを考える。$Ux/\nu \gg 1$ として，この問題で境界層の式が成り立つと仮定すると，平板上の非定常粘性流の境界層の式は次の如く書ける。

P. 2

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u}{\partial y^*} = \nu\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \qquad (2.2)$$

境界条件並びに初期条件は

$$y^*=0,\quad u^*=v^*=0 \qquad (2.3)$$

$$y^*\to\infty,\quad u^*\to U \qquad (2.4)$$

$$x^*\to 0,\quad u^*\to u_B \qquad (2.5)$$

$$t\to 0,\quad u^*\to U \qquad (2.6)$$

$$t^*\to\infty,\quad u^*\to u_B \qquad (2.7)$$

ここにy^*は垂直方向距離で，u^*とv^*はx^*，y^*方向の速度成分を示す。u_BはBlasiusの流れを示す。

初期条件として時間$t=0$の時は流れは一様流であるべきだが，$t\to 0$の小さな時間の領域の中では，流れは無限平板のRayleighの解に近づく。又$t\to\infty$になればこの非定常解は定常解のBlasiusの解に近づく筈である。

次の様な無次元変数を定義する。

$$\eta = y^*/\sqrt{\nu t},\quad \tau = Ut/x^*,\quad u = u^*/U,\quad \psi = \psi^*/\sqrt{\nu U t} \qquad (2.8)$$

ここにψは無次元化した流れ函数である。(2.8)式の無次元変数を導入すると，今迄の三つの独立変数(x^*, y^*, t)から二つだけ(η, τ)のみに変わる事に注意されたい。

$$\left(\tau-\tau^2\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\tau}=\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}+\frac{\eta}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-\tau^2\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} \qquad (2.9)$$

境界条件は

$$\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0 \quad , \quad \eta=0 \qquad (2.10)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\rightarrow 1 \quad , \quad \eta\rightarrow\infty \qquad (2.11)$$

$$\psi\rightarrow\psi_R \quad , \quad \tau\rightarrow 0 \qquad (2.12)$$

$$\psi\rightarrow\psi_B \quad , \quad \tau\rightarrow\infty \qquad (2.13)$$

こゝに ψ_R は Rayleigh の解である。

今迄この問題を扱った人は，Stewartson，Hall 等を含め $\tau=0$ で Rayleigh flow を指定し，$\tau\rightarrow\infty$ で定常な Blasius 解を与える様な放物型の初期値問題として取扱っている。特に Stewartson，Hall はこの放物型問題を熱伝達に良く出て来る型の正則な初期値問題と同様に扱っているが，式(2.9)を見ても解る様に，この放物型の式は最高次の係数が $\tau\geqq 1$ の領域において，符号を反転させる強い特異性をもっており，これと正則な放物式の解の性質を同一に取扱う事には大きな疑問が生ずる。例えば Stewartson 等は(2.9)〜(2.13)式が数学的には適切な問題（正確には Hadamard の定義による）と仮定し，初期値の Rayleigh 解から定常解の Blasius 解まで連続な解の存在する事を仮定した。そうすると $0\leqq\tau<\infty$ の領域では真性な特異点は

連続なので認めて良いが，代数学的特異点は認めてならない事になる。内解の特異点が$\tau=\infty$と$\tau=0$（又は$\tau=1$）で存在しなければならない事は，この問題の解をRayleigh又はBlasiusの解からのτ又は$1/\tau$についての巾展開が不可能な事からも解る。$\tau\to\infty$の時，Stewartsonは次の様な真性特異点をもった解を求めた。

$$\psi(\eta,\tau)=\psi_B(\eta)+\frac{1}{\eta\tau}\frac{\partial\psi_B}{\partial\eta}g(\eta\tau)\exp\left\{-\frac{a^3\tau^3}{9}\right\} \qquad (2.14)$$

ここでgは$1/3$次のベッセル函数で表わされる。(2.14)式は$\tau\to\infty$の極限において総ての数学的条件を満している。

更にStewartsonは$\tau\leqq 1$の領域では前縁の乱れの影響のない事から，$\tau=1$に於いて真性特異点が存在すべきだと考えているが，この領域では今の所解析的な漸近解は求まっていない。

著者の調べた範囲では，特異型放物式の解については，殆んどと云って良い位数学的な解明はなされていない。従ってその正体は謎につつまれている状態にある訳だが，少なくとも，正則型の式と同一視するという見方は冷静に検討され直されるべきだと思われる。如何なる解の存在又は唯一性の証明に於いてもこの最高次係数は全領域に於いて正である事が不可欠である。例えばPetrovsky (1955)を参照されたい。

又このStewartson的な観点には次の様な矛盾が含まれているのに注意願いたい。 良く知られている様に放物型式は常に散逸性を伴うので $\tau=0$ で生じた Rayleigh flow の乱れは，τの増す方向に伝播して行くがこれは乱れがRayleigh領域からBlasius領域に伝播する事を意味する。例えばある大きさ一定の時間について流れを考えると，乱れは後方のRayleigh域から前方のBlasius域の方向に，あたかも流れのベクトルと反対の方向に伝播している事を意味している。これは物理的には矛盾している。これは境界層式には横方向の拡散は無視されている為，横方向の伝播は流れのベクトル方向に沿うしかないからである。

そういった物理的矛盾がなく流れの発展を説明し得る解は，次の様な厳密に一意性のある漸近解の枠内で求める事が出来る事を次に示す。

§3. 漸近展開解.

境界層の式は，Navier-Stokesの式にある近似を行った場合の漸近解の第一項である事は広く知られている。定常流で物体がある長さLを持つ場合には，$Re=\frac{UL}{\nu}$ の逆数で展開し，$Re\to\infty$ のリミットを取るとNavier-Stokesの式の第一近似としてPrandtl

の境界層式が求まる。所がこの問題の様に物体の長さが無限でしかも非定常流である場合に上記の定常流の時の様な一貫性のある漸近解を求めるという事はまだ行われていない。第一上記のレイノルズ数に対応する大きな（又は小さな）パラメータが何であるかも解っていない。

第一に考えつくのは，前縁からの距離xを基にした

$$R_x = Ux/\nu \gg 1.$$

を使用して漸近展開を行う事であろう。これはStewartson, Hall 等が境界層近似を正当化する時の手段であるが，このパラメータでは漸近展開は旨く行かない事が解る。細く調べて解った事は

$$R_t = U^2t/\nu \qquad (3.2)$$

というパラメータで展開する事がこの問題のキーであるという事である。(3.2)式のR_tは他に時間の尺度が無い場合には唯一の無次元化時間でと同時に，直ぐ解る様に前縁の乱れが流れにより拡がる距離Utを使ったレイノルズ数である事に注意願いたい。実はこの事から，このR_tは次の様な二つの重要な二つの物理的意味をもっている。例えば，$R_t\to\infty$という事は，運動を起こしてから充分時間の経った時点の問題という他に，この問題のレイノルズ数が大きいという事をも意味す

する。大きい時間と高いレイノルズ数は一見無関係の様に見えこの事実はこの問題を扱った人には最初は不可解な印象を与える様であるが，実はこの事を正しく認識する事がこの大変難かしい問題を正しく理解する事のキーだとも云える。この$R_t\to\infty$の極限を取るとNavier-Stokesの式の厳密な漸近解は次の如く求まる。

$$\psi(x,y,R_t)=\psi_0(x,y)+\frac{1}{R_t^{1/2}}\psi_1(x,y)+\frac{1}{R_t}\psi_2(x,y)+\cdots$$

x,yを固定し$R_t\to\infty$. (3.3)

ここに$x=\frac{x'}{Ut}$，$y=\frac{y'}{\sqrt{\nu t}}$である。$t$は2章に於いて用いた$t$の逆数である事に留意して頂きたい。(3.3)式をNavier-Stokes式に代入し，R_tの巾についてまとめると，ψ_0を支配する式は(2.9)式と一致し予想通り(3.3)式の第一近似は境界層の式になる。ψ_1は境界層の排除厚の影響により生ずる項で，これは定常の有限平板でKuo(1954)の求めた第二次近似に相当する。この項は定常の半無限平板の問題では零になり，最初の修正項は(3.3)のψ_2の項からとなる。筆者はこの問題でψ_0，ψ_1，ψ_2を求め(3.3)式による漸近解は正しい事を示した。詳細は徳田(1971, Part I)に示したのでここでは一切省略する。

この(3.3)の展開が正しいものだとの事実から式(2.9)

を満す境界層の解ψ_0は(3.3)の展開と一致したものでなければならない。例えば、ψ_0は$O(1)$のものしか含んではならず$O(R_t^{-1/2})$のオーダをもつ解は含んではならない。実はこの事からStewartsonが$x\to 0$の近辺でBlasius解からの摂動解として求めた指数函数を含んだ解(2.14)は、境界層の式より高次のものであり、第一次近似の解には含まれてはならない解だと示す事が出来る。

境界層の式(2.9)が成り立つのは、$x=O(1)$で$R_t\to\infty$になる時であるが、$x\to 0$になる場合でも$x=O(R_t^{-\alpha})$, 但し$0<\alpha<1/2$の実数、の速さで0に近づく場合には成り立つ。するとStewartsonの固有値解(2.14)のf_1の大きさは

$$f_1 = O\left\{\exp\left(-R_t^{3\alpha}\right)\right\} \qquad R_t\to\infty \qquad (3.4)$$

となり$0<\alpha<1/2$の数であるので明らかにf_1は$R_t^{-1/2}$のオーダより(実際には$O(R_t^{-N})$, Nは如何なる正の実数より)小さなものであり、第一章で述べた考察により境界層近似よりもっと小さなオーダのものだと解る。我々の(3.3)式の厳密な漸近解の枠内では、境界層の解としては不適当であると結論出来る。Hall等の境界層の数値解として求まったスムースな解を良く調べると必らずStewartsonの固有値解(2.14)又は(3.4)を含んでおり、Hallの解はルーズな意味では確かに境界層式の解になっ

ているが，以上の理由で，Navier-Stokesの式の厳密な漸近解の枠内では，境界層の解とは云い難い。若し(3.4)が境界層の解として使えないとすれば，$x\to 0$ の近辺ではBlasiusの解はこの非定常境界層式の厳密解であるという重要な結論に達する。$x\gtrsim 1$ではRayleighの解が成り立つ筈なので$0<x<1$のある点で揺れの変わる遷移点が存在する必要がある。このBlasiusの解からRayleigh解への遷移はこの問題の一番難解な点でもあり，これは徳田(1971, Part II)に詳しく述べてある。

§3．考察

以上の様な事から結論としては次の様な新しい事実が解った。

1．境界層近似は$R_e\to\infty$の極限においてのみ成り立つ。

2．$x\to 0$ の近辺では，Blasiusの解は非定常境界層式の厳密解である。$x=0.3$ 近辺にBlasiusの解からRayleighの解に遷移する点が存在する。(徳田1971 Part IIを参照の事)．

3．時間が大きい時に，最終的なBlasius解に近づくその近づき方は，時間の逆巾である。今迄のKellyのstagnation flowの大きい時間の解，又Stewartsonの(2.14)式の解が総べて$t\to\infty$では指数函数的に近づくものとは対照的である。

例えば，この様な事実から次の様な事が解る。Stewartsonはtを時間の変数として扱い，その増加する方向に問題を解いたが，境界層の式では$R_t\to\infty$というリミットが既にとってあり，tを時間の変数と扱う必要は全然ない。実際にはこの逆数xを定常流での無次元化距離変数の如く扱う方が正しい。そうすると，(2.9)式はxについての放物型の式になり，乱れの伝播する方向は前縁から後方に向かってであり，こうすると物理的現象と合致する。勿論これには境層のはがれがなく逆流がない事を前提としている。この問題の正しい解き方は，$x=0$でBlasius解を指定し(初期条件として)xが増える方向に向かって逐次解き，$x\geqq 1$でRayleigh flowになる如き解を求めなければならない。この問題の正しい見方は従って次の様になる。最初のNavier-Stokesの式は時間R_tについて放物型で$R_t=$一定の面は特性曲面となり，$R_t=0$で生じた乱れはR_tの増える方向に伝播して行く。$R_t\to\infty$の領域の特性曲面では境界層近似が成り立つ。するとこの面上で日 $x=$constantの面が新らたな特性曲面になり，この面ではxの増加する方向(前縁から下流方向に向って)に乱れは伝播する事になる。すなわち，Navier-Stokesの式の特性曲面と，境界層の式の特性曲面は数学的にも又物理的にも全然意味が異り，この両者を混用した事に今迄の解の欠点があったものと思われる。

尚本研究は筆者がケンブリッジ大学に滞在中に完成したもので，その間のLighthill，Batchelor教授等の御厚意に感謝したい。

文献

Akamatsu, K & Kamimoto, G. 1966. Department of Aeronautical Engineering, Kyoto University

Dennis, S.C.R. 1971. Private Communication through Prof. Stewartson

Hall, M.G. 1969, Proc. Roy. Soc. A 310, 401-464.

Kuo, Y.H. 1953, J. Math. and Phys. 32, 83-101

Lam, S.H & Crocco, L. 1959, J. Aero. Sci. 26, 54-55

Petrovsky, I.G. 1954, Lectures on Partial Differential Equations, Interscience Publishers, New York

Stewartson, K. 1951, Quart. J. Mech., 4, 182-198.

Tani, I. 1971. Presented UTAM Symposium.

Tokuda, N 1971 Part I & Part II, Submitted J. Fluid Mechanics.